אלגברה 1מ - 104016

בוחן - אביב תשס"ג - 15.5.03

שם פרטי: | | | | | | | | שם משפחה: | | | | | | | | | | |

מספר סטודנט: | | | | | | | | | |

- משך הבחינה שעתיים.
- אין להשתמש בחומר עזר או במחשבון.
- בבחינה חמש שאלות. לצד כל שאלה רשום משקלה.
- יש לענות על כל השאלות **על גבי הטופס** (מותר להשתמש בשני צידיו של כל דף). מחברות הטיוטה לא יאספו ולא יבדקו!
- יש לנמק כל תשובה, ולרשום את כל החישובים. תשובה לא מנומקת לא תחשב.

בהצלחה!

לשימוש הבודקים

	ניקוד
שאלה 1	
שאלה 2	
שאלה 3	
שאלה 4	
שאלה 5	
סה"כ	

שאלה 1 (20 נקודות)

א. מצא את כל הפתרונות של המשוואה

$$(2-i)z^3 = -3-i$$

ב. נתון ש- $|z| = 2$. חשב את

$$\left|z^{2003} + \bar{z}^{2003}\right|^2 + \left|z^{2003} - \bar{z}^{2003}\right|^2$$

שאלה 2 (30 נקודות)

נתונה מערכת משוואות בנעלמים x, y, z (a ו- b פרמטרים):

$$\begin{cases} x - y + z = a \\ (a+b)y + (2-b)z = 1-ab \\ (a+b)y + (2-a)z = 0 \\ ax - ay + az = a \end{cases}$$

א. לאלו ערכי a ו- b יש למערכת פתרון יחיד?

ב. לאלו ערכי a ו- b אין למערכת פתרון?

ג. לאלו ערכי a ו- b יש למערכת אינסוף פתרונות?

ד. מצא את הפתרון הכללי כאשר $a = b = 1$.

שאלה 3 (30 נקודות)

יהי $V = \mathbb{R}^{2\times 3}$. נגדיר:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \in V \;\middle|\; a_{11}+a_{12}+a_{13} = a_{21}+a_{22}+a_{23} = 0 \right\}$$

$$W = \mathrm{Sp}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

א. הוכח ש- U הוא תת-מרחב של V.

ב. מצא בסיס של U.

ג. מצא בסיס של $U \cap W$.

ד. האם $V = U + W$? נמק!

שאלה 4 (10 נקודות)

יהיו A, B, C מטריצות ממשיות מסדר $n \times n$ המקיימות:

- $A = B^2$
- B היא אנטי–סימטרית
- C היא סימטרית
- B ו– C מתחלפות בכפל (כלומר: $BC = CB$).

הוכח שהמטריצה A^tC היא סימטרית.

שאלה 5 (10 נקודות)

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, ויהיו $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}$ וקטורים תלויים לינארית ב– V שכל שלושה מביניהם הם בלתי–תלויים לינארית. נגדיר:

$$L = \mathrm{Sp}\left\{\mathbf{u}, \mathbf{u} - \mathbf{2v}, \mathbf{u} + \mathbf{3v} + \mathbf{w}, \mathbf{w} + \mathbf{x}\right\}$$

חשב את $\dim L$.